'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Programme 4th Semester Examination, 2023

DSC1/2/3-P4-MATHEMATICS

DIFFERENTIAL EQUATION AND VECTOR CALCULUS

(REVISED SYLLABUS 2023)

Time Allotted: 2 Hours | Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.
Symbols have their usual meaning.

GROUP-A / বিভাগ-ক / समूह-क

1. Answer any ***four*** questions from the following: 3×4 = 12

যে-কোন ***চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर लेखः

(a) What do you mean by degree and order of an ordinary differential equation? Find the degree and order of the D. E. 3

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left[1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^4\right]^{1/3}$$

কোনো একটি সাধারণ অবকল সমীকরণের ক্রম (order) এবং ঘাত (degree) বলতে কি বোঝ ?

$\frac{d^2y}{dx^2}=\left[1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^4\right]^{1/3}$ অবকল সমীকরণটির ক্রম এবং ঘাত নির্ণয় কর।

साधारण विभेदक समिकरणका डिग्री र क्रम भन्नाले के बुझिन्छ ?

$\frac{d^2y}{dx^2}=\left[1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^4\right]^{1/3}$ को डिग्री र क्रम निर्णय गर।

(b) Show that the function $f(x, y)=xy^2$ does not satisfy the Lipschitz condition on the strip $|x|\le 1$, $|y|<\infty$. 3

দেখাও যে $f(x, y)=xy^2$ অপেক্ষকটি $|x|\le 1$ এবং $|y|<\infty$ অঞ্চলে Lipschitz-এর শর্তটিকে সিদ্ধ করে না।

पट्टी $|x|\le 1$, $|y|<\infty$ मा function $f(x, y)=xy^2$ ले Lipschitz शर्त सन्तुष्ट गर्दैन भनी प्रमाण गर।

(c) Show that the point at infinity is a regular singular point of the equation 3

$$x^2y''+(3x-1)y'+3y=0$$

দেখাও যে $x^2y''+(3x-1)y'+3y=0$ সমীকরণটির অসীম বিন্দুতে একটি regular singular বিন্দু আছে।

अनन्तमा भएको बिन्दु समिकरण $x^2y''+(3x-1)y'+3y=0$ को नियमित सिंगुलर बिन्दु हो भनी प्रमाण गर।

(d) If $\vec{r}=3t^5\hat{i}+3t^2\hat{j}+2t^3\hat{k}$ then find $\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\ \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right]$. 3

যদি $\vec{r}=3t^5\hat{i}+3t^2\hat{j}+2t^3\hat{k}$ হয় তবে $\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\ \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right]$-এর মান নির্ণয় কর।

यदि $\vec{r}=3t^5\hat{i}+3t^2\hat{j}+2t^3\hat{k}$ भए $\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\ \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right]$ निर्णय गर।

(e) If the vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are irrotational, then show that $\vec{a}\times\vec{b}$ is solenoidal. 3

যদি $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয় irrotational হয় তবে দেখাও যে $\vec{a}\times\vec{b}$ একটি solenoidal হবে।

यदि भ्याक्टर $\vec{a}$ र $\vec{b}$ irrotational भए $\vec{a}\times\vec{b}$ solenoidal हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(f) In what direction from the point $(1,1,-1)$ the directional derivative of $\phi(x,y,z)=3x^4-2y^3+4z^2$ is maximum? 3

$(1,1,-1)$ বিন্দু থেকে কোন্ দিক বরাবর $\phi(x,y,z)=3x^4-2y^3+4z^2$ -এর directional derivative সর্বোচ্চ হবে?

बिन्दु $(1,1,-1)$ बाट कुन दीशामा $\phi(x,y,z)=3x^4-2y^3+4z^2$ को दिशात्मक derivative अधिकतम हुन्छ?

GROUP-B / বিভাগ-খ / समूह-ख

Answer any *four* questions from the following 6×4 = 24

যে-কোন *চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर लेख

2. (a) If y_1 and y_2 are two linearly independent solutions of the linear differential equation $\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0$, then show that the Wronskian is $W(y_1,y_2)=Ae^{-\int p\,dx}$, where A is a constant. 3

যদি $\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0$ রৈখিক অবকল সমীকরণের y_1 এবং y_2 দুটি রৈখিকভাবে স্বতন্ত্র (linearly independent) সমাধান হয় তবে দেখাও যে Wronskian টি $W(y_1,y_2)=Ae^{-\int p\,dx}$ হবে, যেখানে A একটি ধ্রুবক।

यदि y_1 र y_2 विभेदक समिकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0$ का रेखीय स्वतन्त्र समाधानहरू भए।

Wronskian $W(y_1,y_2)=Ae^{-\int p\,dx}$ हुन्छ भनी प्रमाण गर। A एउटा स्थिर मान हो।

(b) Find the particular integral of the equation $\frac{d^2y}{dx^2}+y=\frac{1}{2}e^x\sin x$. 3

$\frac{d^2y}{dx^2}+y=\frac{1}{2}e^x\sin x$ সমীকরণটির particular integral টি নির্ণয় কর।

समिकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+y=\frac{1}{2}e^x\sin x$ का particular integral निर्णय गर।

3. Solve the equation $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}=x^2$ by using the method of undetermined co-efficients. 6

Undetermined co-efficients পদ্ধতি ব্যবহার করে $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}=x^2$ সমীকরণকে সমাধান কর।

Undetermined co-efficient को पद्धति प्रयोग गरेर समिकरण $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}=x^2$ लाई समाधान गर।

4. Solve by the method of variation of parameters 6

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{x^2e^x}.$$

Variation of parameters পদ্ধতির সাহায্যে $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{x^2e^x}$ সমীকরণকে সমাধান কর।

Variation of parameter को पद्धति प्रयोग गरेर समिकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{x^2e^x}$ लाई समाधान गर।

5. Solve the following simultaneous linear equations: 6
নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণগুলিকে সমাধান করঃ
तल दिएको समिकरण प्रणालीलाई समाधान गर:

$$\frac{dx}{dt}+5x+y=e^t$$
$$\frac{dy}{dt}-x+3y=e^{2t}.$$

6. (a) Examine whether the vector valued function $\vec{r}=t^3\hat{i}+e^t\hat{j}+\frac{1}{t+3}\hat{k}$ is continuous at $t=-3$ or not. 3

$\vec{r}=t^3\hat{i}+e^t\hat{j}+\frac{1}{t+3}\hat{k}$ ভেক্টর মান বিশিষ্ট অপেক্ষকটি $t=-3$ তে সন্তত কিনা পরীক্ষা কর।

भेक्टर मान function $\vec{r}=t^3\hat{i}+e^t\hat{j}+\frac{1}{t+3}\hat{k}$ $t=-3$ मा निरन्तर हुन्छ या हुँदैन जाँच गर्नुहोस्।

(b) Find the work done in traversing around a unit circle in the xy-plane counterclockwise against a force field 3

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\hat{i} + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\hat{j}.$$

xy -সমতলে একটি একক বৃত্তপথের চারপাশে ঘড়ির কাটার বিপরীতমুখি

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\hat{i} + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\hat{j}$$

বলক্ষেত্রে কৃতকার্যটি নির্ণয় কর।

xy -सतहमा भएका इकाई बृत्तको वरिपरि घड़ीको विपरीत दिशामा अनि बल क्षेत्र $\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\hat{i} + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\hat{j}$ को विपरीत पार गर्दा गरिने काम निर्णय गर।

7. (a) Show that $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{O}$. 2

দেখাও যে $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{O}$.

प्रमाण गरः $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{O}$।

(b) Prove that for any four vectors $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, 2+2

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) &= [\vec{a}\vec{b}\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d}\\ &= [\vec{a}\vec{c}\vec{d}]\vec{b} - [\vec{b}\vec{c}\vec{d}]\vec{a}\end{aligned}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ চারটি ভেক্টরের জন্য প্রমাণ করঃ

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) &= [\vec{a}\vec{b}\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d}\\ &= [\vec{a}\vec{c}\vec{d}]\vec{b} - [\vec{b}\vec{c}\vec{d}]\vec{a}\end{aligned}$$

प्रमाण गरः कुनै चार भ्याक्टर $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ को लागी

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) &= [\vec{a}\vec{b}\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d}\\ &= [\vec{a}\vec{c}\vec{d}]\vec{b} - [\vec{b}\vec{c}\vec{d}]\vec{a}\end{aligned}$$

GROUP-C / বিভাগ-গ / समूह-ग

Answer any *two* questions from the following 12×2 = 24

যে-কোন *দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

कुनै दुई प्रश्नहरूको उत्तर लेख

8. (a) If $\vec{F} = \phi\vec{\nabla}\phi$, then show that $\vec{F}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F}) = 0$. 4

যদি $\vec{F} = \phi\vec{\nabla}\phi$ তাহলে দেখাও যে $\vec{F}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F}) = 0$।

यदि $\vec{F} = \phi\vec{\nabla}\phi$ भए प्रमाण गर $\vec{F}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F}) = 0$।

(b) Prove that $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$, for any vector function $\vec{A}$. 4

প্রমাণ কর $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$, যেকোন ভেক্টর অপেক্ষক $\vec{A}$ -এর জন্য।

प्रमाण गर: $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$, कुनै vector function $\vec{A}$ को लागी।

(c) Evaluate the line integral $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ along the curve $C: x^2+y^2=1$, $z=2$ in the positive direction from $A(1,0,2)$ to $B(0,1,2)$ where $\vec{F}=(y+xz^2)\hat{i}+(2z-y)\hat{j}+(xy^2-z)\hat{k}$. 4

$C: x^2+y^2=1$, $z=2$ বক্ররেখা বরাবর $A(1,0,2)$ থেকে $B(0,1,2)$ পর্যন্ত ধনাত্মক দিকে (positive direction)

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

line integral টি নির্ণয় কর, যেখানে $\vec{F}=(y+xz^2)\hat{i}+(2z-y)\hat{j}+(xy^2-z)\hat{k}$

रेखा integral $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ वक्र $C: x^2+y^2=1$, $z=2$, को positive दिशा $A(1,0,2)$ देखी $B(0,1,2)$ मा मूल्यांकन गर। $\vec{F}=(y+xz^2)\hat{i}+(2z-y)\hat{j}+(xy^2-z)\hat{k}$

9. (a) If $\vec{r}(t)=7t^2\hat{i}+t^3\hat{j}-(t-1)\hat{k}$ then find $\int_1^2\left(\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)dt$. 4

যদি $\vec{r}(t)=7t^2\hat{i}+t^3\hat{j}-(t-1)\hat{k}$ হয় তবে $\int_1^2\left(\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)dt$ -এর মান নির্ণয় কর।

यदि $\vec{r}(t)=7t^2\hat{i}+t^3\hat{j}-(t-1)\hat{k}$ भए $\int_1^2\left(\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)dt$ निर्णय गर।

(b) Find the volume of the tetrahedron where position vectors of its vertices are $\hat{j}+2\hat{k}$, $3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ and $4\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$. 3

$\hat{j}+2\hat{k}$, $3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ এবং $4\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ অবস্থান ভেক্টর বিশিষ্ট শীর্ষবিন্দু দ্বারা গঠিত tetrahedron-এর আয়তন নির্ণয় কর।

चतुर्पाश्वीयका शीर्षहरूका स्थिति भ्याक्टरहरू $\hat{j}+2\hat{k}$, $3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ र $4\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ भए त्यसका आयतन निर्णय गर।

(c) Show that e^{5x} and e^{3x} are linearly independent solutions of $y''-8y'+15y=0$. Find the solution $y(x)$ with the condition $y(0)=0$ and $y'(0)=1$. 5

দেখাও যে e^{5x} এবং e^{3x} দুটি $y''-8y'+15y=0$ সমীকরণের রৈখিকভাবে স্বাধীন সমাধান। $y(0)=0$ এবং $y'(0)=1$ শর্তে $y(x)$ সমাধানকে নির্ণয় কর।

e^{5x} र e^{3x} $y''-8y'+15y=0$ का रेखीय स्वतन्त्र समाधान हो भनी प्रमाण गर। यदि $y(0)=0$ र $y'(0)=1$ भए समाधान $y(x)$ निर्णय गर।

10.(a) Define phase portrait. 1

Phase portrait কে সংজ্ঞায়িত কর।

Phase portrait का परिभाषा लेख।

(b) Solve the linear autonomous system 6+3+2

$$\dot{x} = x + y\,,\ \dot{y} = 4x - 2y$$

subject to the initial condition $(x_0, y_0) = (2, -3)$. Determine the nature of the critical point of the system and draw the phase portrait for the system.

$(x_0, y_0) = (2, -3)$ প্রারম্ভিক শর্ত হলে $\dot{x} = x + y$, $\dot{y} = 4x - 2y$ linear autonomous system কে সমাধান কর।

উক্ত system টির critical বিন্দুগুলির প্রকৃতি নির্ণয় কর এবং system-এর phase portrait টি অঙ্কন কর।

रेखीय स्वायत्त प्रणाली समाधान गरः

$$\dot{x} = x + y\,,\ \dot{y} = 4x - 2y$$

प्रारम्भिक शर्त $(x_0, y_0) = (2, -3)$ को अधीनमा प्रणालीको critical बिन्दुहरूको प्रकृती खोज गर अनि प्रणालीको phase portrait अंकित गर।

11.(a) Examine whether the differential equation $(y^2e^x + 2xy)dx - x^2dy = 0$ is exact. 2

$(y^2e^x + 2xy)dx - x^2dy = 0$ অবকল সমীকরণটি exact কিনা পরীক্ষা কর।

विभेदक समिकरण $(y^2e^x + 2xy)dx - x^2dy = 0$ exact हो अथवा होइन जाँच गर।

(b) Show that the vector field $\vec{F} = (x^2 - yz)\hat{i} + (y^2 - zx)\hat{j} + (z^2 - xy)\hat{k}$ is irrotational. 3

দেখাও যে ভেক্টরক্ষেত্র $\vec{F} = (x^2 - yz)\hat{i} + (y^2 - zx)\hat{j} + (z^2 - xy)\hat{k}$ টি irrotational.

भेक्टर क्षेत्र $\vec{F} = (x^2 - yz)\hat{i} + (y^2 - zx)\hat{j} + (z^2 - xy)\hat{k}$ irrotational हो भनी प्रमाण गर।

(c) Show that the vector field $\vec{A} = (y^2 + z^3)\hat{i} + (2xy - 5z)\hat{j} + (3xz^2 - 5y)\hat{k}$ is conservative and find the scalar function for the field. 3+4

দেখাও যে $\vec{A} = (y^2 + z^3)\hat{i} + (2xy - 5z)\hat{j} + (3xz^2 - 5y)\hat{k}$ ভেক্টর ক্ষেত্রটি সংরক্ষিত (conservative) এবং উক্ত ক্ষেত্রের scalar অপেক্ষকটি নির্ণয় কর।

भेक्टर क्षेत्र $\vec{A} = (y^2 + z^3)\hat{i} + (2xy - 5z)\hat{j} + (3xz^2 - 5y)\hat{k}$ conservative हो भनि प्रमाण गर अनि त्यस क्षेत्रको लागी scalar function निर्णय गर।

——×——

'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Programme 4th Semester Examination, 2023

DSC1/2/3-P4-MATHEMATICS

DIFFERENTIAL EQUATION AND VECTOR CALCULUS

(OLD SYLLABUS 2018)

Time Allotted: 2 Hours — Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP-A / বিভাগ-ক / समूह-क

1. Answer any ***four*** questions from the following: 3×4 = 12

যে-কোন ***চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर लेखः

(a) Find $\dfrac{1}{D^2-7D+10}\{2e^{5x}+7e^{10}+x\}$.

$\dfrac{1}{D^2-7D+10}\{2e^{5x}+7e^{10}+x\}$ -এর মান নির্ণয় কর।

$\dfrac{1}{D^2-7D+10}\{2e^{5x}+7e^{10}+x\}$ निर्णय गर।

(b) Show that the function $f(x, y)=xy^2$ does not satisfy the Lipschitz condition on the strip $|x|\le 1$, $|y|<\infty$.

দেখাও যে $f(x, y)=xy^2$ অপেক্ষকটি $|x|\le 1$ এবং $|y|<\infty$ অঞ্চলে Lipschitz-এর শর্তটিকে সিদ্ধ করে না।

पट्टी $|x|\le 1$, $|y|<\infty$ मा function $f(x, y)=xy^2$ ले Lipschitz शर्त सन्तुष्ट गर्दैन भनी प्रमाण गर।

(c) Show that the point at infinity is a regular singular point of the equation

$$x^2y''+(3x-1)y'+3y=0$$

দেখাও যে $x^2y''+(3x-1)y'+3y=0$ সমীকরণটির অসীম বিন্দুতে একটি regular singular বিন্দু আছে।

अनन्तमा भएको बिन्दु समिकरण $x^2y''+(3x-1)y'+3y=0$ को नियमित सिंगुलर बिन्दु हो भनी प्रमाण गर।

(d) If $\vec{r} = 3t^5\hat{i} + 3t^2\hat{j} + 2t^3\hat{k}$ then find $\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\ \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right]$.

যদি $\vec{r} = 3t^5\hat{i} + 3t^2\hat{j} + 2t^3\hat{k}$ হয় $\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\ \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right]$-এর মান নির্ণয় কর।

यदि $\vec{r} = 3t^5\hat{i} + 3t^2\hat{j} + 2t^3\hat{k}$ भए $\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\ \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right]$ निर्णय गर।

(e) If the vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are irrotational, then show that $\vec{a} \times \vec{b}$ is solenoidal.

যদি $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয় irrotational হয় তবে দেখাও যে $\vec{a} \times \vec{b}$ একটি solenoidal হবে।

यदि भेक्टर $\vec{a}$ र $\vec{b}$ irrotational भए $\vec{a} \times \vec{b}$ solenoidal हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(f) In what direction from the point $(1, 1, -1)$ the directional derivative of $\phi(x, y, z) = 3x^4 - 2y^3 + 4z^2$ is maximum?

$(1, 1, -1)$ বিন্দু থেকে কোন দিক বরাবর $\phi(x, y, z) = 3x^4 - 2y^3 + 4z^2$ -এর directional derivative সর্বোচ্চ হবে?

बिन्दु $(1, 1, -1)$ बाट कुन दीशामा $\phi(x, y, z) = 3x^4 - 2y^3 + 4z^2$ को दिशात्मक derivative अधिकतम हुन्छ?

GROUP-B / বিভাগ-খ / समूह-ख

Answer any *four* questions from the following 6×4 = 24

যে-কোন *চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर लेख

2. (a) If y_1 and y_2 are two linearly independent solutions of the linear differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$, then show that the Wronskian is $W(y_1, y_2) = Ae^{-\int p\,dx}$, where A is a constant. 3

যদি $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$ রৈখিক অবকল সমীকরণের y_1 এবং y_2 দুটি রৈখিকভাবে স্বতন্ত্র (linearly independent) সমাধান হয় তবে দেখাও যে Wronskian টি হবে $W(y_1, y_2) = Ae^{-\int p\,dx}$ । যেখানে A হল ধ্রুবক।

यदि y_1 र y_2 विभेदक समिकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$ का रेखीय स्वतन्त्र समाधानहरू भए। Wronskian $W(y_1, y_2) = Ae^{-\int p\,dx}$ हुन्छ भनि प्रमाण गर। A एउटा स्थिर मान हो।

(b) Find the particular integral of the equation $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \frac{1}{2}e^x \sin x$. 3

$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \frac{1}{2}e^x \sin x$ সমীকরণটির particular integral টি নির্ণয় কর।

समिकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \frac{1}{2}e^x \sin x$ का particular integral निर्णय गर।

3. Solve the equation $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} = x^2$ by using the method of undetermined co-efficients. 6

Undetermined co-efficient পদ্ধতি ব্যবহার করে $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} = x^2$ কে সমাধান কর।

Undetermined co-efficient को पद्धति प्रयोग गरेर समिकरण $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} = x^2$ लाई समाधान गर।

4. Solve by the method of variation of parameters 6

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x^2e^x}.$$

Variation of parameter পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান করঃ $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x^2e^x}$ ।

Variation of parameter को पद्धतिलाई प्रयोग गरेर समिकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x^2e^x}$ लाई समाधान गर।

5. Solve the following simultaneous linear equations: 6

নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণগুলিকে সমাধান করঃ

तल दिइएको समिकरण प्रणालीलाई समाधान गर:

$$\frac{dx}{dt} + 5x + y = e^t$$

$$\frac{dy}{dt} - x + 3y = e^{2t}.$$

6. (a) Examine whether the vector valued function $\vec{r} = t^3\hat{i} + e^t\hat{j} + \frac{1}{t+3}\hat{k}$ is continuous at $t = -3$ or not. 3

$\vec{r} = t^3\hat{i} + e^t\hat{j} + \frac{1}{t+3}\hat{k}$ ভেক্টরমান বিশিষ্ট অপেক্ষকটি $t = -3$ তে সন্তত কিনা পরীক্ষা কর।

भेक्टर मान function $\vec{r} = t^3\hat{i} + e^t\hat{j} + \frac{1}{t+3}\hat{k}$ $t = -3$ मा निरन्तर (continuous) हुन्छ या हुँदैन जाँच गर्नुहोस्।

(b) Find the work done in traversing around a unit circle in the *xy*-plane counterclockwise against a force field 3

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\hat{i} + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\hat{j}.$$

xy -সমতলে একটি একক বৃত্তপথের চারপাশে ঘড়ির কাটার বিপরীতমুখী

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\hat{i} + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\hat{j}$$

বলক্ষেত্রে কৃতকার্যটি নির্ণয় কর।

xy -सतहमा भएका इकाई वृत्तको वरिपरि घड़ीको विपरीत दिशामा अनि बल क्षेत्र $\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\hat{i} + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\hat{j}$ को विपरीत पार गर्दा गरिने काम निर्णय गर।

7. (a) Show that $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{O}$. 2

দেখাও যে $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{O}$.

प्रमाण गरः $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{O}$

(b) Prove that for any four vectors $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$, 2+2

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) &= [\vec{a}\vec{b}\vec{d}]\vec{c}-[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d}\\ &= [\vec{a}\vec{c}\vec{d}]\vec{b}-[\vec{b}\vec{c}\vec{d}]\vec{a}\end{aligned}$$

$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ চারটি ভেক্টরের জন্য প্রমাণ করঃ

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) &= [\vec{a}\vec{b}\vec{d}]\vec{c}-[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d}\\ &= [\vec{a}\vec{c}\vec{d}]\vec{b}-[\vec{b}\vec{c}\vec{d}]\vec{a}\end{aligned}$$

प्रमाण गरः कुनै चार भ्याक्टर $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ को लागी

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) &= [\vec{a}\vec{b}\vec{d}]\vec{c}-[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d}\\ &= [\vec{a}\vec{c}\vec{d}]\vec{b}-[\vec{b}\vec{c}\vec{d}]\vec{a}\end{aligned}$$

GROUP-C / বিভাগ-গ / समूह-ग

Answer any *two* questions from the following 12×2 = 24

যে-কোন *দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

कुनै दुई प्रश्नहरूको उत्तर लेख

8. (a) If $\vec{F}=\phi\vec{\nabla}\phi$, then show that $\vec{F}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F})=0$. 4

যদি $\vec{F}=\phi\vec{\nabla}\phi$ তাহলে দেখাও যে $\vec{F}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F})=0$

यदि $\vec{F}=\phi\vec{\nabla}\phi$ भए प्रमाण गर $\vec{F}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F})=0$

(b) Prove that $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$, for any vector function $\vec{A}$. 4

প্রমাণ কর $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$, যেকোন ভেক্টর অপেক্ষক $\vec{A}$ -এর জন্য।

प्रमाण गरः $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$, कुनै vector function $\vec{A}$ को लागी।

(c) Evaluate the line integral $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ along the curve $C: x^2+y^2=1$, $z=2$ in the positive direction from $A(1,0,2)$ to $B(0,1,2)$ where $\vec{F}=(y+xz^2)\hat{i}+(2z-y)\hat{j}+(xy^2-z)\hat{k}$. 4

$C: x^2+y^2=1$, $z=2$ বক্ররেখা বরাবর $A(1,0,2)$ থেকে $B(0,1,2)$ পর্যন্ত ধনাত্মক দিকে (positive direction)

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

line integral টি নির্ণয় কর, যেখানে $\vec{F}=(y+xz^2)\hat{i}+(2z-y)\hat{j}+(xy^2-z)\hat{k}$.

रेखा integral $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ वक्र $C: x^2+y^2=1$, $z=2$, को positive दिशा $A(1,0,2)$ देखी $B(0,1,2)$ मा मूल्यांकन गर। $\vec{F}=(y+xz^2)\hat{i}+(2z-y)\hat{j}+(xy^2-z)\hat{k}$.

9. (a) If $\vec{r}(t)=7t^2\hat{i}+t^3\hat{j}-(t-1)\hat{k}$ then find $\int_1^2\left(\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)dt$. 4

যদি $\vec{r}(t)=7t^2\hat{i}+t^3\hat{j}-(t-1)\hat{k}$ হয় তাহলে $\int_1^2\left(\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)dt$ -এর মান নির্ণয় কর।

यदि $\vec{r}(t)=7t^2\hat{i}+t^3\hat{j}-(t-1)\hat{k}$ भए $\int_1^2\left(\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)dt$ निर्णय गर।

(b) Find the volume of the tetrahedron where position vectors of its vertices are $\hat{j}+2\hat{k}$, $3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ and $4\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$. 2

$\hat{j}+2\hat{k}$, $3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ এবং $4\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ অবস্থান ভেক্টর বিশিষ্ট শীর্ষবিন্দু দ্বারা গঠিত tetrahedron টির আয়তন নির্ণয় কর।

चतुर्पाश्वीयका शीर्षहरूका स्थिति भ्याक्टरहरू $\hat{j}+2\hat{k}$, $3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ र $4\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ भए त्यसका आयतन निर्णय गर।

(c) Show that e^{5x} and e^{3x} are linearly independent solutions of $y''-8y'+15y=0$. Find the solution $y(x)$ with the condition $y(0)=0$ and $y'(0)=1$. 2+4

দেখাও যে e^{5x} এবং e^{3x}, $y''-8y'+15y=0$ সমীকরণটির দুটি রৈখিকভাবে স্বাধীন সমাধান। $y(0)=0$ এবং $y'(0)=1$ শর্তে $y(x)$ সমাধানকে নির্ণয় কর।

e^{5x} र e^{3x} $y''-8y'+15y=0$ का रेखीय स्वतन्त्र समाधान हो भनी प्रमाण गर। यदि $y(0)=0$ र $y'(0)=1$ भए समाधान $y(x)$ निर्णय गर।

10.(a) Solve: $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=2\log x$. 6

সমাধান করঃ $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=2\log x$.

समाधान गरः $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=2\log x$

(b) Solve $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-y=x(1-x^2)$ given that $y=x$ is a solution of its reduced equation. 6

$(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-y=x(1-x^2)$ কে সমাধান কর যেখানে উক্ত সমীকরণটির সরলীকৃত (reduced) সমীকরণের একটি সমাধান $y=x$ প্রদত্ত আছে।

समाधान गर: $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-y=x(1-x^2)$ दिएको छ: $y=x$ reduced समिकरणको समाधान हो।

11.(a) A particle moves along the curve, whose equation is $x=2t^2$, $y=t^2-4t$, $z=3t-5$ where t is time. Find the component of its acceleration at time $t=1$ in $\vec{a}=4\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ direction. 3

একটি কণা $x=2t^2$, $y=t^2-4t$, $z=3t-5$ বক্ররেখা বরাবর চলমান যেখানে t হল সময়। $t=1$ সময়ে $\vec{a}=4\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ অভিমুখে ত্বরণের উপাংশটি নির্ণয় কর।

एउटा कण वक्र $x=2t^2$, $y=t^2-4t$, $z=3t-5$ को साथमा चल्छ । जहाँ t समय हो । समय $t=1$ र $\vec{a}=4\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ को दिशामा प्रवेगको भाग निर्णय गर ।

(b) Show that the vector field $\vec{F}=(x^2-yz)\hat{i}+(y^2-zx)\hat{j}+(z^2-xy)\hat{k}$ is irrotational. 3

দেখাও যে ভেক্টরক্ষেত্র $\vec{F}=(x^2-yz)\hat{i}+(y^2-zx)\hat{j}+(z^2-xy)\hat{k}$ টি irrotational.

भेक्टर क्षेत्र $\vec{F}=(x^2-yz)\hat{i}+(y^2-zx)\hat{j}+(z^2-xy)\hat{k}$ irrotational हो भनी प्रमाण गर ।

(c) Show that the vector field $\vec{A}=(y^2+z^3)\hat{i}+(2xy-5z)\hat{j}+(3xz^2-5y)\hat{k}$ is conservative and find the scalar function for the field. 3+3

দেখাও যে $\vec{A}=(y^2+z^3)\hat{i}+(2xy-5z)\hat{j}+(3xz^2-5y)\hat{k}$ ভেক্টরক্ষেত্রটি সংরক্ষিত (conservative) এবং উক্ত ক্ষেত্রের scalar অপেক্ষকটি নির্ণয় কর।

भेक्टर क्षेत्र $\vec{A}=(y^2+z^3)\hat{i}+(2xy-5z)\hat{j}+(3xz^2-5y)\hat{k}$ conservative हो भनी प्रमाण गर अनि त्यस क्षेत्रको लागी scalar function निर्णय गर ।

——×——